

Petit résumé d'Algèbre

Fractions (4^{ème})

Si a, b, c et d désignent des nombres tels que : $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$, alors :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \text{ (diviser c'est multiplier par l'inverse)}$$

Priorité dans les calculs (5^{ème})

Dans une suite de calculs sans parenthèses, il faut effectuer les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions.

Dans une suite de calculs sans parenthèses ne comportant que des additions et des soustractions (ou que des multiplications et des divisions), on effectue les calculs dans le sens de l'écriture.

Dans une suite de calculs, il faut d'abord effectuer les calculs entre parenthèses en commençant par les parenthèses les plus intérieures.

Puissances (4^{ème})

Pour tout nombre relatif a non nul et pour tout entier positif n supérieur à 1 :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \text{ et } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

n et p sont des nombres entiers relatifs : $a^n \times a^p = a^{n+p}$

a et b sont des nombres entiers relatifs : $(a^n)^p = a^{n \times p}$

n et p sont des nombres entiers relatifs : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Exemples :

$\frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$	$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$	$5^2 = 5 \times 5$
	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Règle des signes (5^{ème})

Pour **additionner** deux nombres relatifs de **même signe** :

on additionne leurs distances à zéro ;

on place devant le résultat leur signe commun.

Exemples :

$$(+3) + (+5) = 3 + 5 = 8$$

$$(-3) + (-5) = -8 \text{ cela s'écrit aussi } -3 - 5$$

Pour **additionner** deux nombres relatifs de **signes contraires** :
on soustrait leurs distances à zéro ;
on place devant le résultat le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.

Exemples :

$$(-3) + (+5) = +2 \text{ cela s'écrit aussi } -3 + 5$$

$$(+3) + (-5) = -2 \text{ cela s'écrit aussi } 3 - 5$$

Pour **multiplier** deux nombres relatifs :
- On détermine le signe du produit : (c'est la règle des signes)
Si les deux nombres sont de même signe le produit est positif
Si les deux nombres sont de signes contraires, le produit est négatif.
- On multiplie les deux nombres sans tenir compte de leur signe.

Exemples :

$$(+3) \times (+5) = +15$$

$$(-3) \times (-5) = +15$$

$$(-3) \times (+5) = -15$$

$$(+3) \times (-5) = -15$$

Écriture d'un nombre

Fraction irréductible

Une fraction est *irréductible* si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Pour rendre une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Écriture scientifique

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$, et n est un entier relatif. C'est la *écriture scientifique* de ce nombre.

Ordre de grandeur

On obtient l'ordre de grandeur d'un nombre à partir de son écriture scientifique. On remplace le décimal par 1 ou 10 suivant qu'il est inférieur ou supérieur ou égal à 5.

Exemples

Fraction irréductible	Écriture décimale	Écriture scientifique	Ordre de grandeur
$B = \frac{81}{500}$	$B = 0,162$	$B = 1,62 \times 10^{-1}$	$B = 10^{-1}$

Écriture décimale

Un nombre est décimal quand il a un *nombre fini* de chiffres après la virgule.

Exemple :

Décimal	Non décimal
1,2	$\frac{1}{3} = 0,33333...$
$\frac{3}{8} = 0,375$	$\pi = 3,1415926...$
3 = 3,0	$\cos 25 = 0,9063...$

Valeur approchée

Quand un nombre n'est pas décimal on a l'habitude d'en donner une *valeur approchée* sous forme d'un nombre décimal. On a deux façons de faire :

La troncature : on « laisse tomber » les décimales dont on ne veut pas. C'est toujours un nombre inférieur à celui de départ.

L'arrondi : on encadre le nombre avec une précision donnée. On obtient alors une valeur par défaut (inférieure au nombre de départ) et une valeur par excès (supérieure au nombre de départ).

Exemple : le nombre $\pi = 3,1415926\dots$

Précision	Troncature	Arrondi
Au dixième	3,1	$3,1 < \pi < 3,2$
Au centième	1,14	$3,14 < \pi < 3,15$

3,14 est une valeur approchée par défaut du nombre π au dixième (ou à $0,1 = 10^{-1}$ près).

Notation : On écrit $\pi \approx 3,14$

Calcul littéral

Factoriser c'est faire apparaître des parenthèses.

Développer c'est enlever les parenthèses (l'enveloppe).

Distributivité :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

On factorise



$$3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$



On développe

Signe moins devant une parenthèse :

Quand les parenthèses sont précédées du signe *moins* et qu'elles ne sont pas suivies du signe multiplié ou divisé, on peut supprimer ce signe *moins* et les parenthèses à condition de changer tous les signes dans la parenthèse.

Exemple

$$E = 7 - (-3x + 2)$$

$$E = 7 + 3x - 2$$

$$E = 3x + 5$$

Double distributivité :

$$A = (3x - 2)(5x - 3)$$

$$A = 3x \times 5x + 3x \times (-3) - 2 \times 5x - 2 \times (-3)$$

$$A = 15x^2 - 9x - 10x + 6$$

$$A = 15x^2 - 19x + 6$$

Identités remarquables

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Équations (4^{ème} – 3^{ème})

Règles pour modifier une équation

R1 : On ne change pas les solutions d'une équation en ajoutant (ou en retranchant) un même nombre à ses deux membres.

R2 : On ne change pas les solutions d'une équation en multipliant (ou en divisant) ses deux membres par **un même nombre non nul**.

Exemple

Résoudre l'équation :

$$3x + 4 = 2x + 7$$

$$-2x + 3x + 4 = -2x + 2x + 7 \quad \text{Règle 1}$$

$$x + 4 = 7$$

$$x + 4 - 4 = 7 - 4 \quad \text{Règle 1}$$

$$x = 3$$

Résoudre l'équation :

$$-3x - 4 = 5x + 9$$

$$-5x - 3x - 4 = -5x + 5x + 9 \quad \text{Règle 1}$$

$$-8x - 4 = 9$$

$$-8x - 4 + 4 = 9 + 4 \quad \text{Règle 1}$$

$$-8x = 13$$

$$\frac{-8x}{-8} = \frac{13}{-8} \quad \text{Règle 2}$$

$$x = -\frac{13}{8}$$

Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d) = 0$ sont les solutions de chacune des équations $ax+b = 0$ ou $cx+d = 0$

On dit aussi : « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul »

Inéquations (4^{ème} – 3^{ème})

1. Propriétés

R1 : On ne change pas les solutions d'une inéquation en ajoutant (ou en retranchant) un même nombre à ses deux membres.

R2 : On ne change pas les solutions d'une inéquation en multipliant (ou en divisant) ses deux membres par **un même nombre strictement positif**.

R3 : On ne change pas les solutions d'une inéquation en multipliant (ou en divisant) ses deux membres par **un même nombre strictement négatif et en changeant le sens de l'inéquation**.

2. Exemples

▪ Résoudre l'inéquation

$$5x - 4 > 2x - 3$$

$$-2x + 5x - 4 > -2x + 2x - 3 \quad \text{Règle R1}$$

$$3x - 4 > -3$$

$$3x - 4 + 4 > -3 + 4 \quad \text{Règle R1}$$

$$3x > 1$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{1}{3} \quad \text{Règle R2}$$

$$x > \frac{1}{3}$$

▪ Résoudre l'inéquation

$$3x - 7 < 6x + 4$$

$$-6x + 3x - 7 < -6x + 6x + 4 \quad \text{Règle R1}$$

$$-3x - 7 < 4$$

$$-3x - 7 + 7 < 4 + 7 \quad \text{Règle R1}$$

$$-3x < 11$$

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{11}{-3} \quad \text{Règle R3}$$

$$x > -\frac{11}{3}$$